12/04/16.

Ασκ 135 : Υπολ. του εμβαδού του ελλειπτικού δίσκου

$\underbrace{\left(\frac{x}{\alpha}\right)}_{x'}^2+\underbrace{\left(\frac{y}{b}\right)}_{y'}^2 \leq 1$, $\alpha, b>0$, $r_0>0$.

Λύση : Ο ελλειπτικός δίσκος είναι το $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq r_0^2\}$

$\Delta=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 : (x')^2+(y')^2\leq r_0^2\}$

$\Delta_0=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : r\in[0,r_0],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=g_2(r,\varphi)=\begin{pmatrix}r\cdot\cos\varphi\\ r\cdot\sin\varphi\end{pmatrix}$ $\quad \underset{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\overset{\parallel}{g_1(x',y')}}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$M=g_1(\Delta)$, $\quad \Delta=g_2(\Delta_0)\Rightarrow M=(g_1\circ g_2)(\Delta_0)$

$$v(M)=\int_M 1\,d(x,y)\overset{KAM}{=}\int_\Delta 1\,|\det \underbrace{Dg_1(x',y')}_{\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&b\end{pmatrix}}|\,d(x',y')=$$

$$=\alpha b\int_\Delta 1\,d(x',y')\overset{KAM}{=}\alpha b\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}1\cdot \underbrace{r}_{\det Dg_2(r,\varphi)}\,d\varphi\,dr=\alpha b\,2\pi\int_0^{r_0} r\,dr=$$

$$=\alpha b\,\cancel{2}\pi\frac{r_0^2}{\cancel{2}}=\alpha b\pi r_0^2$$

A.136 Υπολ. τον όγκο του ελλειψοειδούς

$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leq r_0^2$ $(\alpha,b,c,r_0>0)$.

Λύση : $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{\left(\frac{x}{\alpha}\right)}_{x'}^2+\underbrace{\left(\frac{y}{b}\right)}_{y'}^2+\underbrace{\left(\frac{z}{c}\right)}_{z'}^2\leq r_0^2\}$

$B=\{(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 : (x')^2+(y')^2+(z')^2\leq r_0^2\}$

$B_0=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : r\in[0,r_0],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\xleftarrow{g_1}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\xleftarrow{g_2}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$

$$g_1(x',y',z') = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \det Dg_1(x',y',z') = \alpha bc$$

$$g_2(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det Dg_2(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta > 0$$

$$\left.\begin{aligned} M &= g_1(B) \\ B &= g_2(B_\sigma) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M = (g_1\circ g_2)(B_\sigma)$$

$$v(M) = \int_M 1\, d(x,y,z) \overset{KAM}{=} \int_B 1\, \alpha bc\, d(x',y',z') = \alpha bc \int_B 1\, d(x',y',z') =$$

$$\overset{KAM}{=} \alpha bc \int_{B_\sigma} 1\cdot r^2 \sin\theta\, d(r,\theta,\varphi) \overset{Fubini}{=} \alpha bc \int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr =$$

$$= \alpha bc \cdot 2\pi \cdot \Big(\underbrace{\int_0^{r_0} r^2 dr}_{\frac{r_0^3}{3}}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{2}\Big) = \alpha bc \frac{4\pi r_0^3}{3}$$

A 137 Έστω $B\subset\mathbb{R}^3$ το άνω μέρος της μπάλας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R\geq 0$, υπολογίστε το $\int_B z\, d(x,y,z)$.

<u>Λύση</u>: $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z\geq 0\}$

$B_\sigma = \{(r,\theta,\varphi) : r\in[0,R],\ \theta\in[0,\pi/2],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$

$B = g_\sigma(B_\sigma)$, $g_\sigma(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$, $\det Dg_\sigma(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$

$$\int_B z\, d(x,y,z) \overset{KAM}{=} \int_{B_\sigma} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, d(r,\theta,\varphi)$$

$$= \int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\cos\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr = 2\pi \frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(\underbrace{2\theta}_{y})}\, d\theta =$$

$$= 2\pi\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin y\, dy}_{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

<u>Παρατήρηση</u> $\int_B z\, d(x,y,z) = \int_D \int_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z\, dz\, d(x,y)$, όπου $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R^2\}$

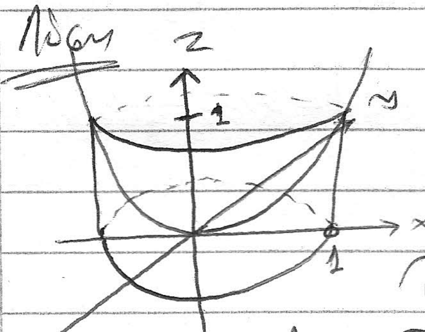
B: κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο Oxy.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{σφαιρ.}]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \forall \varphi \in (0, 2\pi)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{σφαιρ.}]{} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ 0 \text{ ή } 2\pi \end{pmatrix}$$

A 141: Έστω $B \subset \mathbb{R}^3$ το σώμα που περικλείεται απ' το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 1$.
Ναο. το $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z) = I$.

Λύση



① Σχήμα
② Εκφράζω το B «μαθηματικά»
③ $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$
και $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$
Το B είναι κανονικό χωρίο ως προς Oxy.
Άρα $I = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, d(x,y) =$

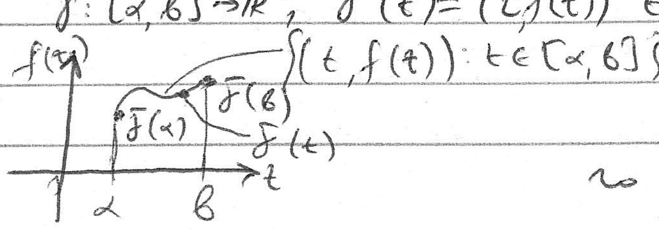
$$= \int_D \sqrt{x^2+y^2}\left(1-(x^2+y^2)\right) d(x,y) \overset{\text{πολικές}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r^2)\cdot r\, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2 - r^4\, dr = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}$$

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$ και επικαμπύλια ολοκληρώματα

Ορισμός: Μία συνεχής συνάρτηση $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$ όπου $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ονομάζεται (παραμετρική) καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.
Η εικόνα της $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ή καμπύλη ή τόξο (καμπύλης) ή ίχνος της καμπύλης γ.

Π.χ. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η απεικόνιση $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ είναι μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$



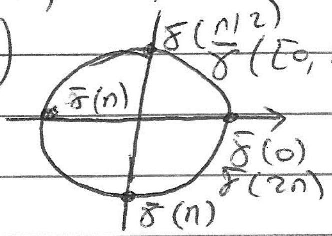
με εικόνα $\gamma[\alpha,\beta] = \{(t, f(t)) : t \in [\alpha,\beta]\} = \Gamma_f$ το γράφημα της f.

(*) Η καμπύλη είναι απεικόνιση

(*) Η εικόνα της είναι σύνολο.

π.χ. $\bar{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$



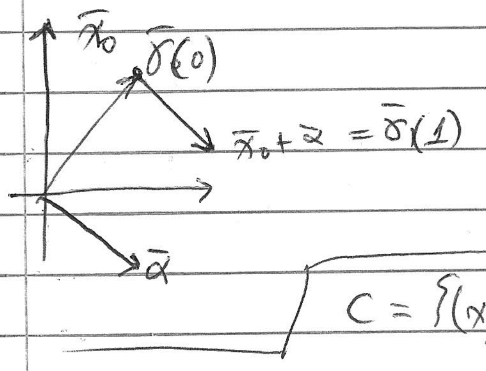
$\bar{\gamma}([0,2\pi]) \to =\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}=C$

$\bar{\gamma}_0(t)=(\cos(2t),\sin(2t))$, $t\in[0,\pi]$

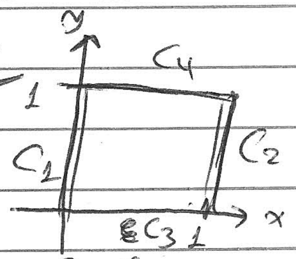
$\bar{\gamma}_0([0,\pi])=\bar{\gamma}([0,2\pi])=C.$

Συμπέρασμα: Η εικόνα μίας καμπύλης (υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$) μπορεί να έχει διαφορετικές παραμετρικοποιήσεις, δηλ. να υπάρχουν διαφορετικές καμπύλες $\bar{\gamma}_1:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}_2:[A,B]\to\mathbb{R}^n$ με $\bar{\gamma}_1([\alpha,b])=\bar{\gamma}_2([A,B])\subset\mathbb{R}^n$.

Π.χ. Έστω $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ και $\bar{\alpha}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$. Τότε η συνάρτηση $[0,1]\ni t\longmapsto \bar{x}_0+t\bar{\alpha}$ ή αλλιώς $\bar{\gamma}(t)=\bar{x}_0+t\bar{\alpha}$, $t\in[0,1]$. είναι μία παραμετρική καμπύλη που έχει ως εικόνα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\bar{x}_0$ με το $\bar{x}_0+\bar{\alpha}$



Π.χ



$C=\{(x,0): x\in[0,1]\}\cup\{(x,1): x\in[0,1]\}\cup\{(0,y): y\in[0,1]\}\cup$
$\cup\{(1,y): y\in[0,1]\}$

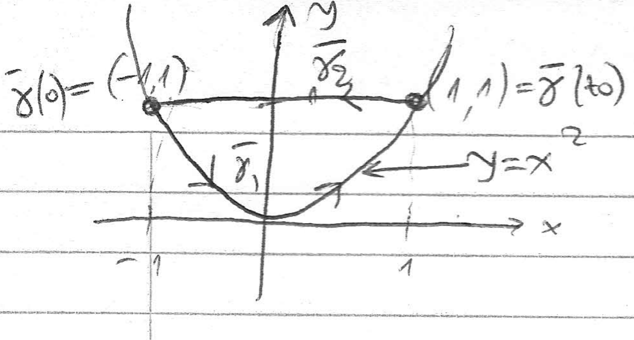
$C=\{0\}\times[0,1]\cup\{1\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}\cup[0,1]\times\{1\}$

Το $C=\square$ μπορούμε να το περιγράψουμε με μία παραμετρική καμπύλη $\bar{\gamma}(t)=\begin{cases}(t,0), & t\in[0,1]\\ (1,0)+(0,t-1), & t\in[1,2]\\ (1,1)+(2-t,0), & t\in[2,3]\\ (0,1)+(0,3-t), & t\in[3,4]\end{cases}$

Όμως πιο απλά μπορούμε να πούμε ότι $\bar{\gamma}=\bar{\gamma}_1\oplus\bar{\gamma}_2\oplus\bar{\gamma}_3\oplus\bar{\gamma}_4$

όπου $\bar{\gamma}_1(t)=(t,0)$, $t\in[0,1]$, $\bar{\gamma}_2(t)=(1,0)+t(0,1)$, $t\in[0,1]$

$\bar{\gamma}_3(t)=(1,1)+t(-1,0)$, $t\in[0,1]$, $\bar{\gamma}_4(t)=(0,1)+t(0,-1)$, $t\in[0,1]$.



$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \oplus \bar{\gamma}_2$$